حل نموذج بجروت

(805)–482

موعد شتاء 2022

طاقم الرياضيات

معهد IQ

سؤال 1

أ. a_n هي متوالية حسابية

$a_2+a_4=124$

$(a_1+d)+(a_1+3d)=124$

$2a_1+4d=124$

نقسم المعادلة على 2:

$\frac{2a_1}{2}+\frac{4d}{2}=\frac{124}{2}$

$a_1+2d=62$

بما ان $a_3=a_1+2d \Leftarrow$ $\boxed{a_3=62}$

إذا الحد الثالث في المتوالية هو 62.

ب. معطى أن $a_4=76$, اذا:

$a_4=a_1+3d=76$

$a_3=a_1+2d=62$ نطرح المعادلتين

$\cancel{a_1-a_1}+3d-2d=76-62$

$\boxed{d=14}$

نجد a_1:

$a_1+2d=62$

$a_1+\underbrace{2\cdot14}_{28}=62 \Rightarrow a_1=62-28$

$\boxed{a_1=34}$

اذا: $\boxed{a_1=34}$ $\boxed{d=14}$

ج.1 $a_n=a_1+(n-1)d$

$\boxed{a_n=34+(n-1)\cdot10}$

$\Rightarrow a_n=34+10n-10 \Rightarrow \boxed{a_n=10n+20}$

ج 2: بما ان الحد الاول في المتوالية زوجي $a_1=34$
وفرق المتوالية $d=14$ هو أيضاً زوجي لذلك
كل حد في المتوالية عبارة عن حاصل جمع عددين زوجيين
وهذا بالضرورة زوجي.

د. بحسب المعطيات عدد الحدود في المتوالية a_n هو 64
قاموا بمحي الحدود:-

$$a_3, a_6, a_9$$

اي كل حد ترتيبه ينقسم على 3 فمحي من المتوالية

نجد عدد الحدود التي محيت:-

$$\text{عدد الحدود التي محيت} = \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}$$

ولكن بما ان عدد حدود المتوالية هو عدد صحيح لذلك
نأخذ اصغر عدد صحيح من النتيجة وهو 21.
اي من متوالية a_n قاموا بمحي 21 حد
(الحد الاخير الذي محي هو a_{63} آخر حد ينقسم ترتيبه على 3).

اذاً الحدود التي محيت هي: $a_3, a_6, a_9, \dots, a_{63}$
هذه المتوالية هي ايضاً حسابية:

حدها الاول $= a_3 = a_1+2d = 34+2\cdot 14 = 62 \to \boxed{a_3=62}$

فرق المتوالية الجديدة هو $3d \to 3\cdot 14 = 42$

$$S_{\text{الحدود التي محيت}} = \underbrace{\frac{21}{2}}_{10.5}\cdot\left[\underbrace{2\cdot \overset{a_3}{62}}_{124} + \underbrace{(\overset{n-1}{21-1})\cdot 42}_{20\cdot 42}\right] = 10122$$

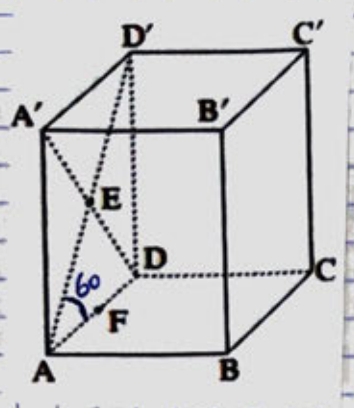
$$S_{a_n} = \frac{64}{2}\left[2\cdot 34 + (64-1)14\right]$$

$$32\cdot\left[68 + 63\cdot 14\right] = 30400$$

مجموع حدود المتوالية الاصلية

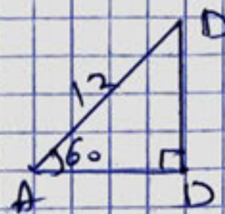
$$\text{مجموع الحدود المتبقية} = \underbrace{30400}_{\text{مجموع } a_n} - \underbrace{10122}_{\text{مجموع التي محيت}} = \boxed{20278}$$

سؤال 2



أ- ارتفاع الصندوق هو DD'

حسب المعطى $\measuredangle D'AD = 60^\circ$ و $AD' = 12$



$$\sin 60 = \frac{DD'}{12}$$

$$12 \cdot \sin 60 = DD'$$

$$\boxed{10.39 = DD'}$$

ب- معطى أن حجم الصندوق هو 432

في $\triangle ADD'$ نستعمل: $\cos 60 = \frac{AD}{12} \rightarrow 12 \cdot \cos 60 = AD$

$$\boxed{AD = 6}$$

حجم الصندوق = مساحة القاعدة * الارتفاع

$$432 = DD' \cdot S_{ABCD}$$

$$432 = 10.39 \cdot \underbrace{AD}_{6} \cdot AB$$

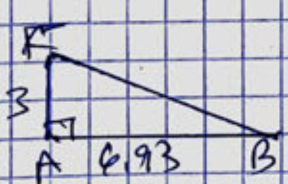
$$432 = 62.34\,AB \longrightarrow \frac{432}{62.34} = AB$$

$$\boxed{6.93 = AB}$$

إذا أطوال القاعدة هي: $\boxed{AB = 6.93}$ $\boxed{AD = 6}$

ج- معطى أن F هي منتصف $AD \leftarrow AF = FD$

في $\triangle AFB$ $AF = \frac{AD}{2} = \frac{6}{2} \rightarrow \boxed{AF = 3}$



حسب فيثاغورس:

$$3^2 + (6.93)^2 = FB^2$$

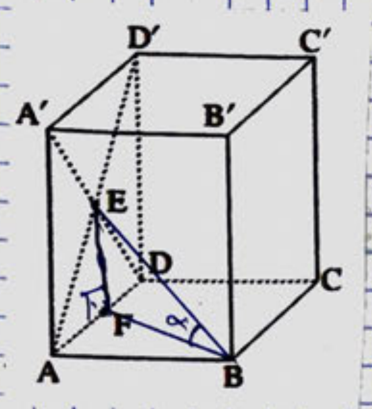
$$\rightarrow 57.02 = (FB)^2 \Longrightarrow 7.55 = FB$$

$$\boxed{BF = 7.55}$$

2. أ

الزاوية بين EB وقاعدة الصندوق

هي $\measuredangle EBF$.

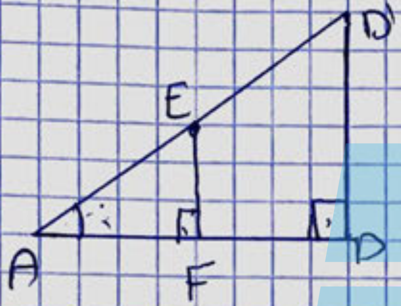


بحسب أ.1 $\boxed{BF=7.55}$

نجد EF ومن ثم نجد الزاوية $\measuredangle EBF$

E هي نقطة التقاء الأقطار في الوجه

D'A'AD لذلك E منتصف AD'



أولاً $\triangle AEF \sim \triangle AD'D$

$90° = \measuredangle F = \measuredangle D$ (حسب ز، ز)

$\measuredangle A = \measuredangle A$ مشتركة.

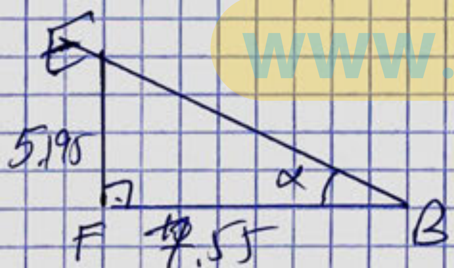
EF قاعدة وسطى في المثلث AD'D

لذلك $EF = \frac{DD'}{2} \longrightarrow EF = \frac{10.39}{2}$

$$\boxed{EF = 5.195}$$

* القاعدة الوسطى في المثلث تساوي نصف قاعدة المثلث.

ثانياً في $\triangle EFB$ نتحقق:



$tg\alpha = \frac{5.198}{7.55} \Longrightarrow$

$$\boxed{\alpha = 34.53}$$

$$\boxed{\measuredangle EBF = 34.53}$$

سؤال 3

أ) $f(x)=\cos x \quad g(x)=\cos 2x$

$0 \le x \le \pi$

تقاطع الدالتين: $g(x)=f(x)$

$\cos 2x=\cos x$

I) $2x=x+2\pi k$

$x=2\pi k$

$k=0 \quad \boxed{x=0}$

$k=1 \quad x=2\pi$ خارج المجال

$k=-1 \quad x=-2\pi$ خارج المجال

II) $2x=-x+2\pi k$

$3x=2\pi k$

$x=\frac{2}{3}\pi k$

$k=0 \quad \boxed{x=0}$

$k=1 \quad \boxed{x=\frac{2}{3}\pi}$

$k=-1 \quad x=-\frac{2}{3}\pi$ خارج المجال

$f(0)=\cos 0=1 \Rightarrow (0,1)$

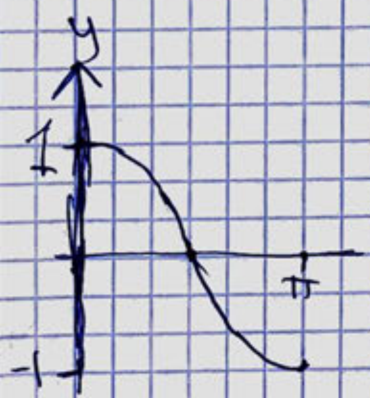
$f(\frac{2}{3}\pi)=\cos(\frac{2}{3}\pi)=\frac{-1}{2} \Rightarrow (\frac{2}{3}\pi,-\frac{1}{2})$

نقاط تقاطع الدالتين

ب) 1. النقاط القصوى ل $f(x)$ هي $f'(x)=0$

$0\le x\le\pi \quad f'(x)=-\sin x=0$

$x=\pi k$



$k=0 \rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=\cos 0=1$

$k=1 \rightarrow x=\pi \Rightarrow f(\pi)=\cos\pi=-1$

$(\pi,-1)$ min , $(0,1)$ max ⟸ حسب رسم cosx

2. $g(x)=\cos 2x$

$g'(x)=-2\sin 2x=0$

$\sin 2x=0 \Rightarrow 2x=\pi k \rightarrow x=\frac{\pi}{2}k$

$k=0 \rightarrow x=0$

$k=1 \rightarrow x=\frac{\pi}{2}$

$k=2 \rightarrow x=\pi$

⟸ نعوض في g للنقاط

$g(0)=\cos 2\cdot 0=1$

$g(\frac{\pi}{2})=\cos 2(\frac{\pi}{2})=\cos\pi=-1$

$g(\pi)=\cos 2\pi=1$

نصنف النقاط بواسطة جدول

x	0		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1
	max קצ		min		max קצ

$g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sin 2\frac{\pi}{4} < 0$

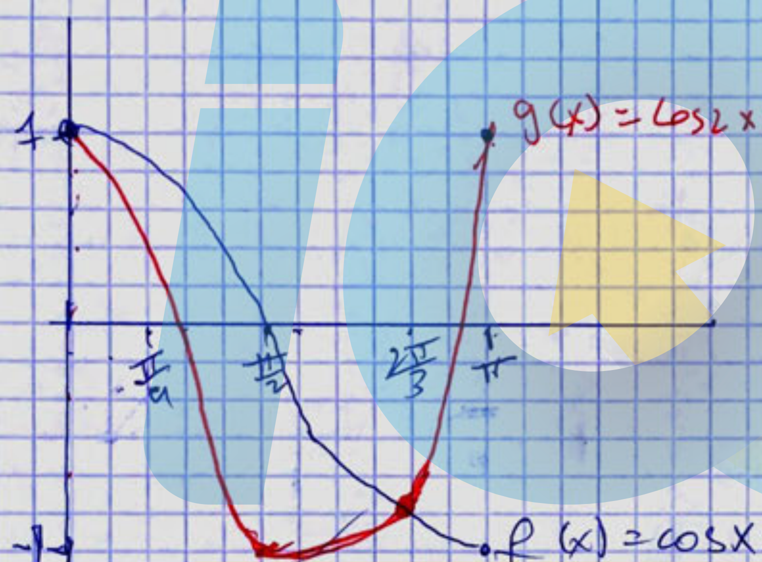
$g'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -2\sin 2\left(\frac{\pi}{3}\right) > 0$

$(0,1)$ מקסימום קצה

$\left(\frac{\pi}{2},-1\right)$ מינימום קצה

$(\pi,1)$ מקסימום קצה

(פ)



د. نقاط تقاطع الدالة $f(x)$, $g(x)$ هي $(0,1)$ و $\left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$
وهي نقاط تقاطع الدالتين $af(x)$ و $ag(x)$ ايضا.
المساحة بين الدالتين هي:

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi} [a\cdot f(x) - a g(x)]\,dx$$

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi} = [a\cdot \cos x - a\cos 2x]\,dx = a\left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{3}\cdot 3$$

$$a\left[\left(\sin\frac{2\pi}{3} - \frac{\sin 2\frac{2\pi}{3}}{2}\right) - \left(\sin 0 - \frac{\sin 0}{2}\right)\right] = 3\cdot\sqrt{3}$$

$$a\cdot\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right) - 0\right] = \sqrt{3}\cdot 3 \Longrightarrow a\frac{3\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\cdot 3$$

$$\boxed{a=4}$$

(6)

سؤال 4

$$f(x)=\frac{8}{e^x}+\frac{e^x}{2}+c$$

أ- بما ان $e^x>0$ لكل x اذاً المقام لن يساوي صفر لكل x وبالتالي الدالة معرفة لكل x

ب- بحسب المعطى الدالة تمر بالنقطة (0,0) اي يتحقق $f(0)=0$

$$\Rightarrow f(0)=\frac{8}{e^0}+\frac{e^0}{2}+c=0 \rightarrow \frac{8}{1}+\frac{1}{2}+c=0$$

$$8\tfrac{1}{2}+c=0 \rightarrow \boxed{c=-8\tfrac{1}{2}}$$

ج- $f(x)=\frac{8}{e^x}+\frac{e^x}{2}-8.5$

تقاطع مع x ← $f(x)=0$

$$\frac{8}{e^x}+\frac{e^x}{2}-8.5=0 \xrightarrow[(\times 2e^x)]{} 16+(e^x)^2-17e^x=0$$

$$\Rightarrow (e^x)^2-17e^x+16=0$$

$$(e^x-1)(e^x-16)=0$$

$e^x-1=0$ او $e^x-16=0$

$e^x=1$ او $e^x=16$

$\boxed{x=0}$ $\boxed{x=\ln 16}$

التقاطع مع x
$(\ln 16,0)$
$(0,0)$

د- نجد $f'(x)$:

$$f'(x)=8\cdot\left(\frac{-1}{(e^x)^2}\right)\cdot e^x+\frac{e^x}{2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-8}{e^x}+\frac{e^x}{2}} \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-8}{e^x}+\frac{e^x}{2}=0$$

$$\Rightarrow \frac{-16+(e^x)^2}{2e^x}=0 \rightarrow (e^x)^2-16=0 \Rightarrow (e^x)^2=16$$

$$(e^x)^2 = 16 \Longrightarrow e^x = \pm\sqrt{16} \Longrightarrow e^x = \pm 4$$

$e^x = 4$ او $e^x = -4$

أو $\boxed{x = \ln 4}$ لا يوجد حل

لأن e^x موجب دائماً

نجد الاحداثي y $(x=\ln 4)$

$$f(x) = \frac{8}{e^x} + \frac{e^x}{2} - 8.5$$

$$f(\ln 4) = \frac{8}{e^{\ln 4}} + \frac{e^{\ln 4}}{2} - 8.5 = \frac{8}{4} + \frac{4}{2} - 8.5 = -4.5$$

$$(\ln 4, -4.5)$$

نَصنّف النقطة:

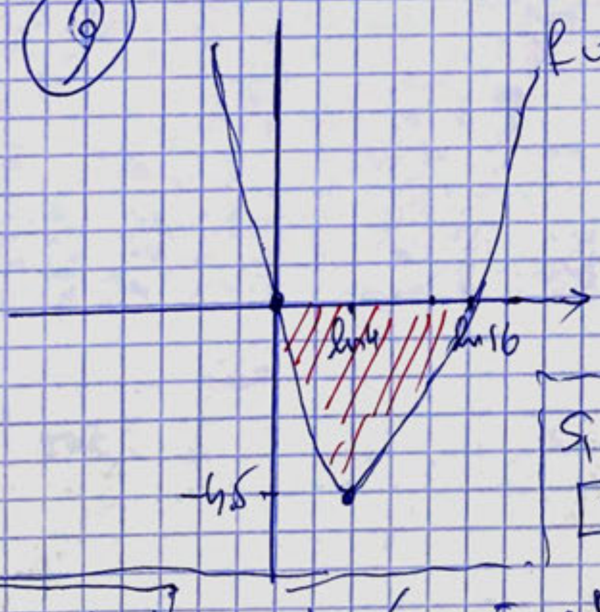
x	0	$\ln(4)$	2
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$$f'(0) = \frac{-8}{e^0} + \frac{e^0}{2} = -8 + \tfrac{1}{2} < 0$$

$$f'(2) = \frac{-8}{e^2} + \frac{e^2}{2} > 0$$

اذاً $(\ln 4, -4.5)$ مينيموم

9



$f(x) \Longrightarrow$

(9) المساحة بين الدالة والمحور x

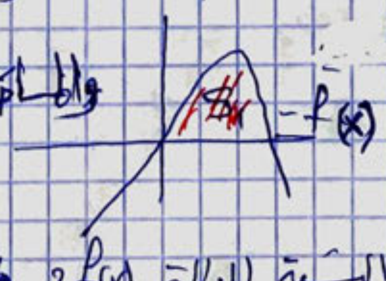
هو المساحة المخططة $= S$.

الدالة $-f(x)$ ستبدل بين المجالات

الموجبة والسالبة وستكون كما يلي

والمساحة المسننة هي S_1

و $\boxed{S_1 = S_2}$



اما بالنسبة للدالة $2f(x)$ فالمساحة المحصورة ستكون $2S$ $\Leftarrow$ $\boxed{S_2 = 2S > S}$

سؤال 5

$f(x)=\frac{4x}{1+\ln 2x}$

أ) مجال تعريف الدالة:

يجب أن يتحقق شرطين معاً:

I $2x>0$ (مجال تعريف دالة ال $\ln$)

$x>0$

وأيضاً

II $1+\ln 2x \neq 0$

$1+\ln 2x=0 \Rightarrow \ln 2x=-1 \Rightarrow 2x=e^{-1}$

$\Rightarrow 2x=\frac{1}{e} \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2e}}$

إذاً مجال تعريف الدالة $x>0$ وأيضاً $x\neq\frac{1}{2e}$

ويمكن كتابته كالتالي:

$0<x<\frac{1}{2e}$, $x>\frac{1}{2e}$

ب) الدالة تقطع المحور x إذا كان البسط يساوي 0

أي $4x=0 \leftarrow x=0$ ولكن الدالة غير معرفة في $x=0$

لذلك لن تقطع المحور x.

ب.2) خط التقارب العمودي يكون في النقطة التي فيها الدالة غير معرفة $x=\frac{1}{2e}$ (النقطة لا تصفر البسط ليست ثقب).

ج- نجد $f'(x)$

$f'(x)=\frac{4(1+\ln 2x)-4x\left(\frac{2}{2x}\right)}{(1+\ln 2x)^2}=\frac{4+4\ln 2x-\cancel{\frac{8x}{2x}}}{(1+\ln 2x)^2}$

$f'(x)=\frac{\cancel{4}+4\ln 2x-\cancel{4}}{(1+\ln 2x)^2}=\frac{4\ln 2x}{(1+\ln 2x)^2}$

$$f'(x) = \frac{4\ln 2x}{(1+\ln 2x)^2} = 0$$

$$\Longrightarrow 4\ln 2x = 0 \Longrightarrow \ln 2x = 0$$

$$\Longrightarrow 2x = e^0 \longrightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

نجد y:

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{4\left(\frac{1}{2}\right)}{1+\ln\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{1+\underbrace{\ln 1}_{0}} = 2$$

اي النقطة $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

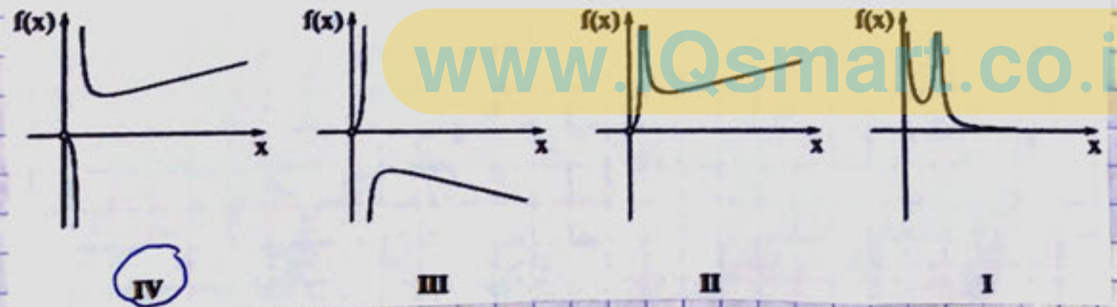
نفحص النقطة بمساعدة جدول:

x	0	$0<x<\frac{1}{2e}$ ($x=0.1$)	$\frac{1}{2e}$	$x=0.4$	$\frac{1}{2}$	$x>\frac{1}{2}$ ($x=1$)
$f'(x)$	$\equiv$	$-$	$\equiv$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\equiv$		$\equiv$		2 min	

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}, 2\right) \text{ min}}$$

$$f'(0.1) < 0 \qquad f'(0.4) < 0 \qquad f'(1) > 0$$

هـ) بحسب نتائج البنود السابقة فان $x = \frac{1}{2e}$ خط تقارب



ولذلك لا يمكن ان يكون الرسمات I و II ملائمات. في المجال $\frac{1}{2e} < x < \frac{1}{2}$ الدالة تنازلية ولذلك نشطب الرسم III ويبقى رسم IV الملائم.

و) المجال الذي يتحقق أن $f(x)\cdot f'(x) < 0$ هو المجال الذي فيه:

I) f' سالبة و f موجبة اي f موجبة تنازلية $\Downarrow$ $\boxed{\frac{1}{2e} < x < \frac{1}{2}}$

أو

II) f' موجبة و f سالبة أي f تصاعدية وسالبة $\Downarrow$ $\emptyset$